Morfismos, Vol. 2, No. 2, 1998, pp. 37–47

EL TEOREMA DE VAN KAMPEN Y APLICACIONES

EDUARDO GONZÁLEZ [1] JESÚS GONZÁLEZ [2]

Resumen

En este artículo revisamos una generalización del teorema clásico de Van Kampen y, mediante el uso de la teoría de espacios recubridores, analizamos aplicaciones a la teoría de grupos libres no abelianos.

1991 Mathematics Subject Classification: 55-02, 20-02.
Keywords and phrases: Grupo fundamental, espacio recubridor, grupo libre no abeliano.

1 Introducción

Un problema básico de la matemática moderna es el calcular el grupo fundamental asociado a un espacio topológico dado. El Teorema de Van Kampen ofrece una alternativa de su cálculo a través del producto amalgamado de los grupos fundamentales de los elementos de una cubierta adecuada del espacio. Este es justamente el caso cuando tomamos la unión en un punto de una cantidad arbitraria de círculos.

En su tratamiento clásico dicho teorema tiene leves restricciones sobre la cantidad de subespacios que se usan para el cálculo del grupo fundamental del espacio mayor. La generalización que se expone en este artículo (Teorema 2.2.1), radica en la necesidad de extender la cantidad de subespacios que se pueden ocupar, e imponer las restricciones necesarias en ellos. El resultado es bien conocido por los expertos, pero

[1]Estudiante de Maestría, Departamento de Matemáticas, CINVESTAV-IPN. Becario del CONACYT.
[2]Investigador, CINVESTAV-IPN.

hasta donde los autores saben, no se cuenta con bibliografía para la versión que proponemos. Por otra parte, las condiciones impuestas en la generalización hecha por Massey [7] son algo más elaboradas que las nuestras. La demostración de nuestra versión está basada en la demostración clásica anterior a la de Massey, primeramente exhibida en [1]. La prueba expuesta en este artículo es accesible para cualquier estudiante de licenciatura con conocimientos en teoría de homotopía. Es bueno señalar que una prueba alternativa al teorema original, probado por H. Seifert [8] y luego por E. R. Van Kampen [10], se puede encontrar en [4], donde la demostración se da como caso particular de resultados generales sobre espacios recubridores universales.

Los resultados expuestos en este artículo tienen consecuencias en la extructura de los subgrupos de un grupo libre no abeliano. Por ejemplo, es fácil construir un par de grupos libres H y G de forma que H sea subgrupo de G con índice m arbitrario; lo interesante es que bajo estas condiciones, el rango de H queda completamente determinado por m de acuerdo al siguiente

Teorema 1.1.1 *Sea F un grupo libre en n generadores, y sea H un subgrupo de F con índice $[F : H] = m$, entonces H es libre en $m(n-1)+1$ generadores.*

El resultado anterior es probado en el texto clásico de Kurosh [5], donde la demostración depende únicamente de herramienta algebraica convencional, que requiere de habilidad en cálculos y de un gran desarrollo. Nosotros deduciremos el teorema anterior en la Seccion 3 a partir de la correspondencia existente entre los subgrupos de un grupo libre y subespacios recubridores de un complejos celular unidimensional. Esta demostración está basada en la que aparece en [9].

2 Teorema de Van Kampen

Antes de enunciar el teorema, hagamos una disgresión sobre el producto amalgamado de grupos.

2.1 Grupos y Amalgamas

Sea $\mathcal{H}$ una familia de grupos y para cada pareja (H, H') de elementos en $\mathcal{H}$ con $H \neq H'$ supongase dados un grupo $G_{H,H'}$ y un homomorfismo $f_{H,H'} : G_{H,H'} \to H$, tales que $G_{H,H'} = G_{H',H}$. Sea F el grupo libre generado por la unión disjunta $\bigsqcup_{H\in\mathcal{H}} H$ y fijémonos en el conjunto $R = \{(xy)\cdot y^{-1}\cdot x^{-1} \in F : x, y \in H, H \in \mathcal{H}\} \bigcup \{f_{H,H'}(g)\cdot(f_{H',H}(g))^{-1} : g \in G_{H,H'}, H, H' \in \mathcal{H}\}$. Aquí la operación de cada $H \in \mathcal{H}$ se denota por yuxtaposición, mientras que la multiplicación en F la indicamos mediante un punto. De esta manera, el producto xy en la definición de R se realiza en el correspondiente grupo H y el resultado se opera en F con los inversos (en F) de x y y. En vista de esto, es irrelevante si el inverso de $f_{H',H}(g)$ se toma en H o en F.

Definición 2.1.1 *Definimos el producto amalgamado de $\mathcal{H}$ según la familia $\mathcal{F}$ de grupos $G_{H,H'}$ y homomorfismos $f_{H,H'}$ como $*_{\mathcal{F}}\mathcal{H} = F/N(R)$ donde $N(R)$ es el grupo normal más pequeño que contiene a R. En algunos casos, por simplicidad sólo se escribirá $*\mathcal{H}$ en vez de la notación anterior.*

Nota 2.1.2 Observe que entre las relaciones que se imponen al grupo libre F, están aquellas que garantizan que cada composición $g_H : H \hookrightarrow F \to F/N(R)$ sean morfismos de grupos. Más aún, las dos maneras de tomar elementos de $G_{H,H'}$ a H y H' via las funciones $f_{H,H'}$ y $f_{H',H}$ coinciden en el producto amalgamado, es decir el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& H \arrow[dr, "g_H"] & \\
G_{H,H'} \arrow[ur, "f_{H,H'}"] \arrow[dr, "f_{H',H}"'] & & *\mathcal{H} \\
& H' \arrow[ur, "g_{H'}"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Nota 2.1.3 En caso de que los $G_{H,H'}$ sean triviales, todos los morfismos $f_{H,H'}$ deben serlo también. Por tanto, el segundo tipo de relaciones impuestas al grupo libre en la Definición 2.1.1 son triviales y así la amalgama de los grupos H coincide con su producto categórico [6]. En cualquier caso, si cada grupo H tiene como generador al conjunto X_H, podemos cambiar F en la Definición 2.1.1 por el grupo libre generado por la unión disjunta $\bigsqcup\limits_{H\in\mathcal{H}} X_H$. En particular, $\bigcup\limits_{H\in\mathcal{H}} g_H(X_H)$ genera a $*\mathcal{H}$.

El producto amalgamado cumple la siguiente propiedad universal.

Teorema 2.1.4 *Supongamos que $h_H : H \to G$ es un homomorfismo de grupos para cada $H \in \mathcal{H}$, y ellos son tales que $h_H \circ f_{H,H'} = h_{H'} \circ f_{H',H}$, entonces existe un único homomorfismo $h : *\mathcal{H} \to G$ tal que $h \circ g_H = h_H$ para cada $H \in \mathcal{H}$; es decir, h completa el diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dr, "g_H"] \arrow[drr, bend left, "h_H"] & & \\
G_{H,H'} \arrow[ur, "f_{H,H'}"] \arrow[dr, "f_{H',H}"'] & & *\mathcal{H} \arrow[r, dotted, "h"] & G \\
 & H' \arrow[ur, "g_{H'}"] \arrow[urr, bend right, "h_{H'}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

haciendolo conmutativo para cualesquiera H, $H' \in \mathcal{H}$.

Demostración: Definamos $h' : F \to G$ en generadores por $h'|_H = h_H$ para todo $H \in \mathcal{H}$. Si $(xy) \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} \in R$, entonces $h'((xy) \cdot y^{-1} \cdot x^{-1}) = h'(xy)h'(y)^{-1}h'(x)^{-1} = g_H(xy)g_H(y)^{-1}g_H(x)^{-1} = 1$. Además $h'(f_{H,H'}(g) \cdot f_{H',H}(g)^{-1}) = h_H(f_{H,H'}(g)) \cdot h_{H'}(f_{H',H}(g))^{-1} = 1$, para todo $g \in G_{H,H'}$. De esta manera, las relaciones que definen al producto amalgamado están contenidas en el núcleo de h', que por tanto pasa al cociente determinando un único homomorfismo $h : *\mathcal{H} \to G$, que por construcción satisface $h \circ g_H = h_H$. $\square$

Corolario 2.1.5 *Si cualquier elemento $x \in G$ puede ser escrito de la forma $x = x_1 \cdots x_k$, con $x_s = h_{H_s}(a_s)$ para algún $a_s \in H_s, H_s \in \mathcal{H}$ ($1 \leq s \leq k$), entonces h es suprayectiva.*

Demostración: La relación $h(g_{H_1}(a_1) \cdots g_{H_k}(a_k)) = x_1 \cdots x_k = x$ es válida bajo estas condiciones y con ello se tiene el resultado. $\square$

2.2 El Teorema

Analicemos el caso de interés topológico. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{A} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una cubierta abierta de X, con índices en un conjunto J. Supongamos que $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in J} X_\alpha$. Tenemos naturalmente la familia de grupos dada por $\mathcal{H} = \{\pi_1(X_\alpha, x_0)\}_{\alpha \in J}$. Para cada pareja $\alpha, \beta \in J$, $\alpha \neq \beta$, consideremos el grupo $\pi_1(X_\alpha \cap X_\beta, x_0)$ y el morfismo natural $f_{\alpha,\beta} : \pi_1(X_\alpha \cap X_\beta, x_0) \to \pi_1(X_\alpha, x_0)$ inducido por la inclusión. Notemos que bajo las condiciones anteriores podemos tomar el producto amalgamado $*\mathcal{H}$ según la Definición 2.1.1. La relación existente entre el grupo fundamental de X y el producto amalgamado anterior la da el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1 *(Van Kampen) Con la notación anterior, si la intersección de cada cuatro (o menos) espacios de la cubierta $\mathcal{A}$ es un subespacio arco conexo de X, entonces existe un isomorfismo*

$$\pi_1(X, x_0) \simeq *\mathcal{H}.$$

Demostración: Tomemos los homomorfismos $h_\alpha : \pi_1(X_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ inducidos por las inclusiones. Por el Teorema 2.1.4 existe un único morfismo

$$h : *\mathcal{H} \to \pi_1(X, x_0).$$

Demostraremos que h es de hecho un isomorfismo.

a) Epimorfismo. Sea $\overline{p} \in \pi_1(X, x_0)$ con $p : I \to X$ un lazo basado en x_0, $I = [0, 1]$. Un cubierta de I está dada por $\{p^{-1}(X_\alpha)\}_{\alpha \in J}$. Al ser I un espacio métrico compacto podemos tomar un ε–número de Lebesgue para esta cubierta. Seleccionemos números $0 = \ell_0 \leq \ell_1 \leq \ldots \leq \ell_n = 1$ tales que $\ell_i - \ell_{i-1} < \varepsilon$, entonces para cada $i = 1, \ldots, n$ existe $\alpha_i \in I$ para el cual se cumple $p([\ell_{i-1}, \ell_i]) \subset X_{\alpha_i}$. Tomemos curvas $q_i : I \to X_{\alpha_i} \cap X_{\alpha_{i+1}}$ con $q_i(0) = x_0, q_i(1) = p(\ell_i)$, para $0 < i < n$, y $q_0 = q_n = x_0$ las curvas constantes. Ahora podemos definir la curva $p_i : I \to X$ dada por $p_i(t) = p(\ell_i + t(\ell_{i+1} - \ell_i))$, es decir la restricción $p|_{[\ell_i, \ell_{i+1}]}$. Así pues, si denotamos el producto clásico de las curvas p y q por $q \cdot p$, entendiendo que primero recorremos a p y luego a q, obtenemos

$$p = p_{n-1} \cdots p_0 \sim q_n^{-1} \cdot p_{n-1} \cdot q_{n-1} \cdot q_{n-1}^{-1} \cdot p_{n-2} \cdot \cdots p_1 \cdot q_1 \cdot q_1^{-1} \cdot p_0 \cdot q_0$$

y $q_s^{-1} \cdot p_{s-1} \cdot q_{s-1}$ representa un elemento de $\pi_1(X_{\alpha_s}, x_0)$. Por el Corolario 2.1.5, la suprayectividad de h es inmediata.

b) Monomorfismo. Si un elemento $\overline{p}_m \cdots \overline{p}_1$ del producto amalgamado está en el núcleo de h, con $\overline{p}_i \in \pi_1(X_{\alpha_i}, x_0)$, entonces existe una homotopía $H : I \times I \to X$ en X del producto $p_m \cdot p_{m-1} \cdots p_1$ al camino trivial constante x_0. Veamos que $\overline{p}_m \cdots \overline{p}_1 = 1$ en el producto amalgamado. Eligiendo un ε-número de Lebesgue para la cubierta abierta $\{H^{-1}(X_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ de $I \times I$, podemos encontrar como en la parte a), un número $n \in \mathbb{N}$ tal que para $0 \leq i, j < n$ la imagen bajo H de

$$C_{ij} = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$$

está contenida en $X_{\alpha_{i,j}}$, para algún $\alpha_{i,j} \in J$. Entendiendo la reparametrización necesaria, definimos las curvas $p_{i,j}$, $q_{i,j} : I \to X_{\alpha_{i,j}}$ por

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= H|_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times \{\frac{j}{n}\}} \\ q_{i,j} &= H|_{\{\frac{i}{n}\} \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]}. \end{aligned}$$

Note que las curvas anteriores no necesariamente son basadas en x_0. Para cada vértice $H(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$ tomemos una curva $r_{i,j}$ de tal vértice a x_0, cuya imagen esté en cada (a lo más 4) $X_{\alpha_{r,s}}$ al cual pertenezca $H(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$. Lo anterior es posible gracias a que dichas intersecciones son arco conexas. En el caso de que $H(\frac{i}{n},\frac{j}{n}) = x_0$, escogemos $r_{i,j} = x_0$ (la curva trivial). Con lo anterior podemos encontrar curvas basadas definidas por

$$\widetilde{p}_{i,j} = r_{i+1,j} \cdot p_{i,j} \cdot r_{i,j}^{-1} \qquad \widetilde{q}_{i,j} = r_{i,j+1} \cdot q_{i,j} \cdot r_{i,j}^{-1}.$$

Observe que por construcción la imagen de $\widetilde{p}_{i,j}$ está contenida en $X_{\alpha_{i,j}}$ y, si $j > 0$, también en $X_{\alpha_{i,j-1}}$. Similarmente la imagen de $\widetilde{q}_{i,j}$ está contenida en $X_{\alpha_{i,j}}$ y, si $i > 0$, también en $X_{\alpha_{i-1,j}}$. Las orillas de $H(C_{i,j})$ se relacionan por $q_{i+1,j} \cdot p_{i,j} \sim p_{i,j+1} \cdot q_{i,j}$, donde la homotopía es relativa a extremos y su imagen está en $X_{\alpha_{i,j}}$,pues cualquiera de ellos está en la imagen del morfismo

$$\pi\left(C_{i,j};(\frac{i}{n},\frac{j}{n}),(\frac{i+1}{n},\frac{j+1}{n})\right) \to \pi\left(X_{\alpha_{i,j}};H(\frac{i}{n},\frac{j}{n}),H(\frac{i+1}{n},\frac{j+1}{n})\right)$$

inducido por H. Aquí representamos por $\pi(Y;x,y)$ a las clases de homotopía basada de caminos en Y que unen x con y. Observe que

$$\pi\left(C_{i,j};(\frac{i}{n},\frac{j}{n}),(\frac{i+1}{n},\frac{j+1}{n})\right)$$

tiene sólo un elemento, pues existe una correspondencia uno a uno $\pi(x,y) \leftrightarrow \pi(x,x)$ si $\pi(x,y) \neq \phi$ dada justamente por el morfismo inducido por un elemento de $\pi(x,y)$. Así pues, podemos construir una homotopía basada, cuya imagen esté en $X_{\alpha_{i,j}}$ y que exhibe la relación

$$r_{i+1,j+1} \cdot q_{i+1,j} \cdot p_{i,j} \cdot r_{i,j}^{-1} \sim r_{i+1,j+1} \cdot p_{i,j+1} \cdot q_{i,j} \cdot r_{i,j}^{-1}.$$

Si introducimos el producto $r_{i+1,j}^{-1} \cdot r_{i+1,j}$ en el centro del lado izquierdo y su equivalente en el lado derecho, concluimos que

$$[\widetilde{q}_{i+1,j}][\widetilde{p}_{i,j}] = [\widetilde{p}_{i,j+1}][\widetilde{q}_{i,j}].$$

Esta igualdad es válida tanto en $\pi_1(X_{\alpha_{i,j}}, x_0)$ como en el producto amalgamado, en donde se verifican las siguientes igualdades

$$\prod_{k=0}^{n-1}[\widetilde{p}_{k,j}] = [\widetilde{q}_{n,j}^{-1}] \cdot \left(\prod_{k=0}^{n-1}[\widetilde{p}_{k,j+1}]\right) \cdot [\widetilde{q}_{0,j}] \quad 0 \leq j < n$$

de donde

$$
\begin{aligned}
&[\widetilde{p}_{n-1,0}] \cdots [\widetilde{p}_{0,0}] = \\
&\qquad \{[\widetilde{q}_{n,0}^{-1}] \cdots [\widetilde{q}_{n,n-1}^{-1}]\} \cdot \{[\widetilde{p}_{n-1,n}] \cdots [\widetilde{p}_{0,n}]\} \cdot \{[\widetilde{q}_{0,n-1}] \cdots [\widetilde{q}_{0,0}]\}\,.
\end{aligned}
$$

Por construcción, cada factor en el lado derecho de la última igualdad representa la curva constante en x_0 y por lo tanto terminaremos si probamos que

$$[p_m] \cdots [p_1] = [\widetilde{p}_{n-1,0}] \cdots [\widetilde{p}_{0,0}]$$

en el producto amalgamado. Esto se tiene, ya que un representante común para ambas clases es el lazo $H_0 : I \to X$ inicial de la homotopía H. $\square$

3 Aplicaciones

3.1 CW Complejos

Para los objetivos que persigue este artículo es conveniente introducir la noción de complejo celular y de la topología CW.

Definición 3.1.1 *Un espacio de Hausdorff X se dice tener estructura de complejo celular, si X es la unión disjunta de subespacios e_α (α en algún conjunto de índices) llamados celdas, las cuales satisfacen:*

a) A toda celda le asociamos un número entero $n \geq 0$ llamado la dimensión de la celda. Si e_α tiene dimensión n, es usual remarcar la dimensión denotando la misma celda por e_α^n. Al conjunto unión de todas las celdas de dimensión n le llamaremos el esqueleto de dimensión n (n-esqueleto) y se denotará por X^n.

b) Si e_α^n es una n-celda, existe una función $f_\alpha : B^n \to X$, llamada característica de la celda e_α^n, donde B^n es el disco unitario de dimensión n. Estas funciones deben ser tales que $f(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$ y $f_\alpha|_{B^n - S^n}$ sea un homeomorfismo de $B^n - S^n$ a e_α^n.

Un subconjunto A de X es llamado subcomplejo de X si A es la unión de algunas celdas e_α y $\overline{e}_\alpha \subset A$ cada vez que $e_\alpha \subset A$.

Es directo de la definición que X^n es un subcomplejo de X, pues $\overline{e}_\alpha^n = f_\alpha(B^n)$.

Definición 3.1.2 *Sea X un complejo celular, X es llamado de cerradura finita (C) si para cada celda e_α^n, la intersección de todos los subcomplejos* *celulares que contienen e^n_α es un subcomplejo con un número finito de celdas. X tiene la topología débil (W) si para todo subconjunto $F \subset X$, F es cerrado si y sólo si $F \cap \overline{e}^n_\alpha$ es compacto para cada celda e^n_α. Un CW-complejo es un complejo celular de cerradura finita con la topología débil.*

Ejemplo 3.1.3 Regresemos al problema de la introducción, es decir, calcular el grupo fundamental de $X = \bigvee_{\alpha \in J} S^1_\alpha$ una unión en un punto de una colección de círculos con índices en un conjunto J. Nótese que X se puede visualizar como un complejo celular con $|J|$ celdas de dimensión uno y una sóla celda de dimensión cero. Los mapeos característicos son justamente los que identifican (pegan) los extremos del intervalo $[0,1]$ con la celda de dimensión cero. Así, con la topología débil, X tiene estructura de CW complejo. Sea $x_\alpha \in S^1_\alpha$ un punto en la α-ésima copia de S^1 en X, cada x_α distinto del punto de unión de todos los círculos x_0. Definimos $L_\alpha = S^1_\alpha - \{x_\alpha\}$. Sea $U_\beta = \bigvee L'_\alpha$ donde L'_α es igual a L_α si $\alpha \neq \beta$ y a S^1_β en el otro caso. No es difícil convencerse que cada U_β es del tipo de homotopía de un círculo, pues se puede dar una retracción fuerte de X a la copia de S^1 correspondiente al índice β. Además, los abiertos U_α cubren a X y cada intersección arbitraria de ellos es arco conexa y del tipo de homotopía de un punto. En vista del Teorema 2.2.1 y la Nota 2.1.3, el grupo fundamental de X es libre en tantos generadores como copias de S^1 tenga X. En particular, si tenemos una unión en un punto de n copias del círculo, su grupo fundamental será, según el argumento anterior, un grupo libre en n generadores.

3.2 Grupos Libres

Ya hemos visto como podemos realizar un grupo libre como el grupo fundamental de algún espacio topológico. Nosotros sabemos del álgebra clásica, que todo subgrupo de un grupo libre es libre. Responderemos aquí exactamente la misma pregunta usando nuestro ejemplo anterior, finalizando con la prueba del Teorema 1.1.1. Para ello necesitaremos resultados clásicos sobre espacios recubridores de CW complejos cuyas pruebas omitimos o únicamente bosquejamos. Si el lector desea, puede revisar las demostraciones en [9], donde la exposición es profunda y bien desarrollada.

Definición 3.2.1 *Un espacio topológico X se dice semilocalmente 1-conexo, si para cada $x \in X$ existe un conjunto abierto U vecindad de*

x, tal que el homomorfismo $i_* : \pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x_0)$ inducido por la inclusión es trivial.

Proposición 3.2.2 *Sea X un espacio topólogico conexo por arcos y semilocalmente 1-conexo. Dado un subgrupo H del grupo $\pi_1(X,x_0)$, existe un espacio recubridor de X, digamos $(\widetilde{X},p)$, $p:\widetilde{X}\to X$, tal que $\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)=H$ con $\widetilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$, de forma que la inclusión $H\hookrightarrow \pi_1(X,x_0)$ está inducida por p.*

Nota 3.2.3 Un ejemplo de espacios que cumplen las hipótesis de la Propocición 3.2.2 son las uniones en un punto de esferas con la topología de CW-complejo.

Proposición 3.2.4 *Todo espacio recubridor $\widetilde{X}$ de un CW-complejo X es un CW-complejo. Más aún si X es de dimensión 1, $\widetilde{X}$ también lo es.*

Para demostrar este resultado, hay que construir, por inducción sobre la dimensión de cada esqueleto, las funciones características para la estructura celular de $\widetilde{X}$. Esto es posible, si antes se demuestra un teorema general de levantamientos de funciones del tipo $I^n \to X$. La demostración de dicho teorema es análoga a la del Teorema de levantamiento de homotopías, usando que I^n es compacto y métrico.

Nota 3.2.5 Bajo las hipótesis de la Proposición 3.2.4, si X^0 es el esqueleto de dimensión cero de X, entonces $\widetilde{X}^0 = p^{-1}(X^0)$. Lo mismo es válido, si se toman únicamente las celdas de dimensión 1.

Lema 3.2.6 *Todo CW-complejo unidimensional conexo X, es del tipo de homotopía de una unión en un punto de círculos, así que su grupo fundamental es libre. Además, si X tiene un número finito de celdas, su grupo fundamental es isomorfo a un grupo libre en $1-\chi(X)$ generadores, donde $\chi(X)$ es la característica de Euler de X y está determinada por $\chi(X)=n-m$, con n el número de celdas de dimensión 0 y m el número de celdas de dimensión 1.*

Para demostrar este Lema observamos que cada 1-celda e_0^1 se puede unir a una 0-celda por uno de sus extremos o por ambos. En el segundo caso, la cerradura de e_0^1 es del tipo de homotopía de un círculo. En el primer caso la cerradura de e_0^1 es homeomorfo al intervalo $[0,1]$, el cual se puede contraer a un punto. Con ello no se altera la característica de

Euler ni el tipo de homotoía del complejo, pues de hecho, sólo se alteran aquellas 1-celdas que tengan los mismos extremos que e_0^1, en donde la deformación es similar a la del caso en que un hemisferio del círculo se colapsa a un punto, obteniéndose de nueva cuenta un círculo. El proceso termina con un espacio que es la unión en un punto de círculos, en donde la fórmula se sigue del Ejemplo 3.1.3.

Demostración de 1.1.1: Sea X una unión en un punto de n círculos, de modo que X tiene un grupo fundamental isomorfo a F. Por las Proposiciones 3.2.2 y 3.2.4 el espacio recubridor $(\widetilde{X}, p)$ de X tiene grupo fundamental isomorfo a H, así como una estructura de CW complejo unidimensional. Como la fibra $p^{-1}(x)$ de cada punto $x \in X$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto de clases laterales F/H, tenemos que $|p^{-1}(x)| = [F : H]$. Por la Nota 3.2.5, hay exactamente m celdas de dimensión cero en $\widetilde{X}$ y mn celdas de dimensión uno. Por tanto $\chi(\widetilde{X}) = m\chi(X)$, de donde, por el Lemma 3.2.6, el grupo fundamental de $\widetilde{X}$ es isomorfo a un grupo libre en $1 - m\chi(X) = 1 + (n-1)m$ generadores, obteniendo el resultado. $\square$

Agradecimientos

El primer autor le agradece al segundo por la paciencia y apoyo recibidos en los últimos cuatro años.

Eduardo González
Departamento de Matemáticas,
Centro de Investigación y Estudios Avanzados,
P.O. Box 14-740,
eduardo@math.cinvestav.mx

Jesús González
Departamento de Matemáticas,
Centro de Investigación y Estudios Avanzados,
P.O. Box 14-740,
jesus@math.cinvestav.mx

Referencias

[1] R. H. Crowell. *On the Van Kampen theorem*, Pac. J. Math., **9** (1959), 43-50.

[2] Brayton Gray. *Homotopy theory, an introduction to algebraic topology*, Academic Press, New York, 1975.

[3] M.J.Greenberg and J.R.Harper. *Algebraic topology, a first course*, Addison-Wesley, 1984.

[4] R. J. Knill. *The Seifert and Van Kampen theorem via regular covering spaces*, Pac. J. Math., **49** (1973), 149-160.

[5] A. G. Kurosh. *The theory of groups*, Chelsea, New York, 1955.

[6] S. Lang. *Algebra*, Addison-Wesley, New York, 1993.

[7] William S. Massey. *A basic course in algebraic topology*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] H. Seifert. *Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume*, Ber. Sächs. Akad. Wiss., **83** (1931), 26-66.

[9] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[10] E. R. Van Kampen. *On the conections between the fundamental groups of some related spaces*, Am. J. Math., **55** (1933), 261-267.